

「数学マジック」の実践とその教育的意義について

The Practice of "Math Magic" and Its Educational Significance

矢田 敦之*

高知大学教育学部*

本研究は、「数学マジック」によって、生徒が数学的事象に関心をもち、授業に意欲的に取り組むこと、また、数学的マジックの教育的意義について検討することを目的とした。これをもとに、「3つの山」という数学マジックの授業を行った結果、数学マジックには、①生徒の関心・意欲の喚起に有効である、②論理的思考と問題解決能力の涵養のために活用できる、③生徒の自信に繋がる内容・方法、の教育的意義があることが確認された。

キーワード：数学マジック， 教育的意義， 数学的活動， 3つの山

1. 問題の所在と目的

中学校数学における課題の一つである生徒の学習意欲の低下は、「数学嫌い」と合わせて、PISAの国際調査などの各種調査の結果が公表されるたびに社会的関心事としてマスコミ等で取り上げられ話題になる。この学習意欲の低下の原因は一つではなく、様々なことが影響していると考えられ、現段階では数学に対する学習意欲を向上させるための要因は明らかになっていない(川村・秋田・藤田, 2016)。とはいえ、授業者は生徒の学習意欲を高めるための取り組みとして、導入時の教材や提示の仕方、評価や指導などの工夫を行う。とりわけ、導入時における工夫の1つに「数学マジック」があげられる。数学マジックとは、「マジックの種に数学的な根拠が用いられており、通常マジックのように手先の器用さや特殊なテクニックを必要としないマジック」(砂井, 2016)のことである。中学1年の教科書にも「文字の式」の発展教材として「数当て」のマジックが載っている。これが、小学生対象であれば、「算数マジック」として、ゲーム的要素を含む2進数を用いた「数あてゲーム」というマジックを行うことができる(例えば、矢田, 2008)。①1~31のうち1つの数を選んでもらい、授業者にはわからないように友達にその数を知らせる。②授業者は、代表者にいくつかの数が書かれたカードを順に5枚見せる。③代表者は決めた数がカードに「ある」か「ない」か、を答える。④授業者は、代表者の「ある」「ない」を受けて、代表者が決めた数をあてる、という流れである。これを契機に、表などを活用して

マジックの「種(またはトリック)」を明らかにしていく。この過程の取組こそ、まさに数学的活動である。当然そこには数学的意味が存在することから、自然と児童・生徒は数学性を獲得する機会に恵まれる。

本研究では、数学マジックによって、生徒が数学的事象に関心をもち、授業に意欲的に取り組むこと、また、数学的マジックの教育的意義について検討することを目的とする。そのうえで、数学的な内容に対する解法を自分なりに見出す思考や態度を涵養することも指向する。

2. 研究の方法

生徒の学習感想から出された記述内容と授業における生徒の発言からみえる、①授業に対する関心②解法を見出そうとする思考や態度、の2つをもとに、本実践を分析する。このうえで、数学マジックがもつ教育的意義について考察する。

3. 数学マジックと授業

3.1. 授業展開

数学マジック「3つの山」(マーティン・ガードナー, 1999)をもとに、筆者が加工した教材を用いて、中学1年「文字の式」の発展学習として2時間実施した。

第1次の授業の導入段階では、授業者の指示のもと、生徒は、数学マジックの不思議な現象に出合い、展開の段階に繋がる疑問を持った。展開の段階では、表を用いて、「取る個数」と「最後の個数」の関係を

調べ、その関係をまとめて終える。

第2時では、文字式を用いて「一般化」を図る。また、もとの個数や「山」の数が変わっても一般化が成り立つのかを検討する。第1時の流れの詳細は次のとおりである。

3.2. 導入

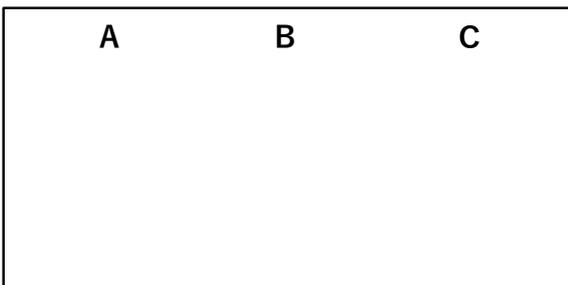


図1：A,B,Cの表示

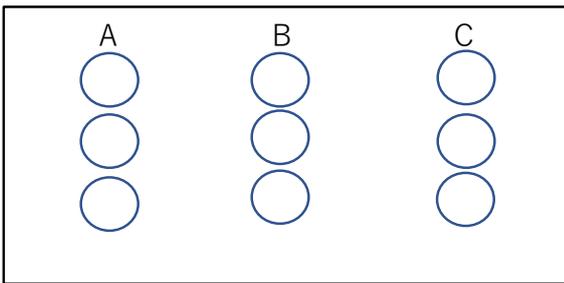


図2：1つの「山」に3個置いた状態

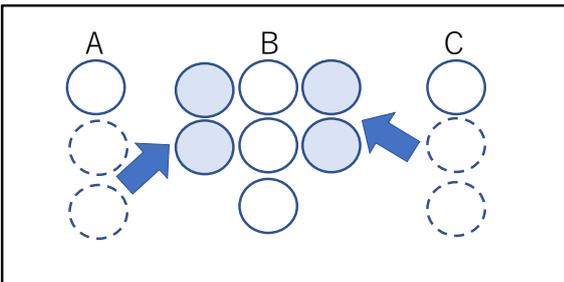


図3：A,Cから2個取りBへ移動した状態

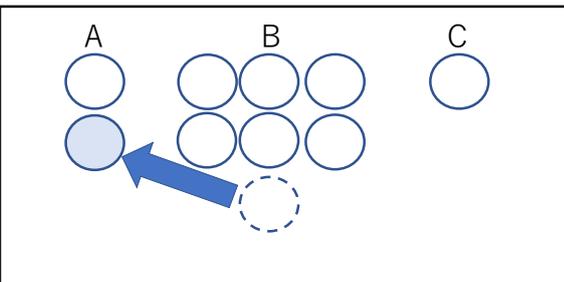


図4:A(またはC)の数をBからAへ移す

授業者が黒板にA,B,Cと書く(図1)。授業者は、学習者に、A,B,Cの下に○を描くように伝える(図2)。その際、A,B,Cは同数であること、4個～9個のいずれかの数の○を描くことをルールとして確認する。次にA,Cから2個ずつ取って、Bへ移動させる(図3)。学習者にAの○の個数を数えさせる。そのうえで、Aの○の個数分をBからAへ移動させる(図4)。授業者が、学習者のBの個数を「6個です。」と言い当てる。

3.3. まとめ

A,Cから何個取ってもBは6個なのか、学習者に問い、実際に試すように促す。その際、A,B,Cの最初の個数を9個に揃える。授業者は、学習者にワークシートを配付し、作業によって空欄に数を入れていくように伝える。表を完成させることで「わかったこと」を本時のまとめとする。

4. 授業の実際

授業は、K県中学校第1学年2クラス計70名を対象に、2023年6月20日、各クラスにおいて2時間構成(50分授業×2)で行われた。授業者は、筆者である。なお、筆者は、授業者として、1学期途中から1学期末まで、対象クラスの数学授業を担当しており、本時にいたるまでの生徒の数学の反応をある程度捉えている。第1時では、授業者がBの個数を当てる、という不思議な現象を生徒全員が体験した後、はじめの個数を仮に3個として、不思議な現象について、表を用いて吟味し、「取る個数」と「最後の個数」の関係を見出すことができた。第2時では、第1時の授業後の学習感想をもとに、文字を用いて、「一般化」について検討した。また、学習感想にあった「山」の数や元の個数の変化を取り上げ、これについても「一般化」を検討した。本稿では、1つのクラスの授業を取り上げて、記載する。

5. 授業の考察と学習感想

5.1. 授業の考察

第1時の生徒が現象を楽しみ、授業に関心をもつ場面で、授業者が、学習者全員のBの個数を言い当てたときの学習者の反応である。

T1: 6個ですね (Bの個数を言い当てる)。
 S1: (拍手)先生, すごいね。どうして(当てた理由を知りたい様子)?
 S2: もう1回, やろう(現象の「おもしろさ」と授業者が当てた理由を探りたい様子)。

S2は, これまで数学の授業に対して肯定的な反応を示さなかった生徒である。数学マジックを導入に用いることで意欲的に取り組むことができた。
 第2時の「きまり」を考える場面である。

T1: どうやったら, いつでも「きまり」が使えると言えますか。
 S3: 文字を使うといい。

これまでの文字式を使った学習をいかす発言があり, はじめの○の個数をxとして考えるアイデアが導出された。具体的には, 次のとおりである。①A,B,Cの山に同じ個数の○を描く場面: 3つの山の個数は全てxとする。②A,Cから2個ずつ取ってBへ移す場面: A $x-2$, B $x+4$, C $x-2$ ③A(またはC)の数をBからAへ移す場面: A $(x-2)+(x-2)=2(x-2)$ B $x+4-(x-2)$ C $x-2$ となる。これらを整理すると, ④A $2x$ B 6 C $x-2$ となる。①~④の過程を整理すると表1のようになる。

表1: はじめの数をxとして○を動かした過程

	A	B	C
①	x	x	x
②	$x-2$	$x+4$	$x-2$
③	$x-2+(x-2)$	$x+4-(x-2)$	$x-2$
④	$2x$	6	$x-2$

第2時において, 発展的に考える場面である。
 T1: それでは, この問題を発展させて新たな問題はできないですか?
 S4: 最初の山の数を変えたらいいと思います。
 S5: 取る個数を2個から増やしてみるといいです。
 S4やS5は, 問題の発展性に気付き, 自ら考え, 表現することができていた。

第2時では, ①生徒の意見をもとに, 山の数を増やす(3→4)。②取る個数を増やす(2→3→4→…), の2つを発展として扱い, 一般性について検討した。

[山の数の変化]

① 山の数を3つから4つに増やして, まずは

A,B,C,Dにx個置くことにする。

- ② A,C,Dから2個ずつ取って, これらを合わせた数をBに置く。
- ③ Aに残っている数をBから取って, Aに移す。
- ④ Bには「6個」あることがわかる。

表2: はじめの数をxとして○を動かした過程2

	A	B	C	D
①	x	x	x	x
②	$x-2$	$x+6$	$x-2$	$x-2$
③	$x-2+(x-2)$	$x+6-(x-2)$	$x-2$	$x-2$
④	$2x$	8	$x-2$	$x-2$

[取る個数の変化]

次に, 生徒の意見に基づき, 取る個数を2個から増やし, Bの最後の個数の変化について表を活用して確かめる。山の数はもとの3つで考えることにする。

- ① 山の数を3つにして, A,B,Cにx個置く。
- ② A,Cから3個ずつ取って, これらを合わせて数をBに置く。
- ③ Aに残っている数をBから取って, Aに移す。
- ④ Bには「8個」あることがわかる。

ここで, 生徒から「取る個数」を変えるとBの最後の個数が変わるという意見があった。これをもとにして, A,Cから「取る個数」とBの最終個数の関係を示す表3の空欄を埋めていく作業を行う。このとき, A,B,Cのいずれの山も最初の個数を「9個」とする。

表3: A, Cから「取る個数」とBの最終個数の関係

	2	3	4	5	6	7
A,Cから「取る個数」	2	3	4	5	6	7
Bの最後の個数	6					

生徒は表3の空欄に数を入れることで, A,Cから「取る個数」とBの最後の個数の関係を読み取ることができる。表3を完成させると, 表4のようになる。

表4: A, Cから「取る個数」とBの最終個数の関係2

	2	3	4	5	6	7
A,Cから「取る個数」	2	3	4	5	6	7
Bの最後の個数	6	9	12	15	18	21

このことから、A,Cから取る個数を3倍した数とBの最後の個数が等しいことに気づいた。これにより、表にはない、取る個数が8個のときのBの最後の個数を考えることができた。

〔一般化〕

表1,表2では、最初の個数を x として考えた。A,Cから取る数を a として、一般化を図ることにした。ただし、中学1年の1学期という、まだ、文字を2つ扱うと困難性を示す可能性がある生徒がいるため、指導にあたっては丁寧に進めることに留意した。

T1：文字を使っていつでも使えるか考えよう。

最初の個数を x とします。

T2：取る個数を a とします。では、このとき、A,B,Cの個数を式で表すとどうなりますか。

S1：(黒板に書く) A $x-a$ B $x+2a$ C $x-a$

これによって、Bの最後の個数は $3a$ となり、表と同じように、「A,Cから『取る個数』 $\times 3$ =「Bの最後の個数」になることがわかる。

表5 はじめの数 x 取る個数 a とした○を動かした過程

	A	B	C
①	x	x	x
②	$x-a$	$x+2a$	$x-a$
③	$x-a+(x-a)$	$x+2a-(x-a)$	$x-a$
④	$2x$	$3a$	$x-a$

5.2. 学習感想からみえる学習意欲

学習感想には、「楽しい」「おもしろい」という情意面の肯定的な記述とともに、「わかった」「自分でもマジックができる」という認知に関する肯定的記述も目立った。また、「友達に筋道立てて説明できた。」「自分の考えを発表できて自信がもてた。」といった思考や表現に関する記述もみられた。

さらに、「自分で問題を考えることができた。」という発展的思考を示す感想があり、そこには、「条件を変える」という言葉もあり、意欲を喚起するうえで有効であったことがわかる。

6. 数学マジックの教育的意義について

授業中の生徒の様相や実践後の生徒の学習感想を分析した結果、数学マジックの教育的意義を次の3つに集約できることがわかった。1つ目は、生徒の関心・意欲の喚起につながる教育的意義があげられる。授業中の意欲的な取組や発表などの生徒の様相や肯定的な学習感想から、数学マジックは、抽象的な数学の概念を魅力的でアクセスしやすいものに変換して、生徒の数学への関心・意欲を喚起させることがわかった。2つ目は、「論理的思考と問題解決能力の涵養」のために活用できるという教育的意義である。数学マジックは、数学的な原理や論理に基づいて「トリック」を解明するための洞察力と論理的思考力を養うのに役立つことがわかった。また、「トリック」を解決するためには推理力や洞察力を駆使する必要がある、問題解決能力を高めることになる。多くの生徒は、今回の数学マジックの「取る個数」と最後の個数の関係を捉え、「山」の数や個数を変化した問題にも文字式を用いて対応した。つまり、数学マジックが、論理的思考と問題解決能力を促進するための手段として機能したといえる。あわせて、生徒が2時の授業において発展的に取り組んだことから、数学マジックは、発展的思考の涵養にも繋がる教材としての教育的価値を有しているといえる。3つ目は、生徒の自信に繋がる内容・方法として教育的意義である。生徒自らが、今回の数学マジックの発展した形を考案し、実際に授業において友達に紹介できた。この経験は、自己表現能力を向上させ、今後、数学の問題を考えて、表現することへの自信に繋がったといえる。

参考文献

- Martin Gardner. (1956). MATHEMATICS, MAGIC AND MYSTERY. dover publications inc.
- 川村俊貴・秋田美代・藤田彰子(2016).生徒の学習意欲と数学の理解の関係についての研究, 日本科学教育学会研究会研究報告Vol.30No.7, pp.5-8.
- 砂井博光(2016).数学マジックを用いた授業実践についてー選択教科における実践の検討としてー, 教職研究第28号, 立教大学, p.93.
- マーチン・ガードナー (1999). 金沢養訳『数学マジック』, 白揚社, p.90.
- 矢田敦之.(2008) 算数科における2進数を意識した数の構成に関する研究, 数学教育論文発表会論文集41, 日本数学教育学会, pp.881-882.