

高校生が数学的探究を遂行できるようになるための教材開発 — 折り紙を用いたものづくりを通して —

Development of Teaching Materials to Enable High School Students to Perform Mathematical Inquiry
: Through Creating Items Using Origami

葛城 元*・黒田 恭史**

奈良学園大学人間教育学部*・京都教育大学教育学部**

高等学校の数学教育では、変化の激しい社会に対応していくために、生徒が数学的探究を遂行できる力の育成が重要であると考えた。折り紙を用いたものづくりは、数学の活用と実物検証による科学的手法を用いた思考法の習得と、目的とする作品を精度高く創造・構築できるといった数学の果たす役割の理解が期待できる。本研究では、折り紙を用いたものづくりを通して、生徒が数学的探究を遂行できるようになるための教材開発を行った。

キーワード：高等学校，数学的探究，教材開発，折り紙と数学

1. はじめに

高等学校の数学教育では、従前より生徒自身の生活に数学が役立っているという有用性を理解させることが重要であると指摘されてきた（横地，1986）。その方法の1つには、身の回りの事物や現象を数学的な問題として捉え、それを数学的に処理して解決する「数学的モデリング」の教材研究が挙げられる。例えば、柳本（1989）は、数学的モデリングの循環構造を用いて「ティーカップの製作」を学習課題とした教材開発を行っている。一般的に作品製作では、計算を必要とせず感覚的に作ることもあるが、ここでは目的とする作品を精度高く仕上げるために、数学を使って設計し、その計算結果をもとに粘土で実物を作るといった検証を取り入れている。作品製作に必要な仮定や条件を置き、それを数学的に処理した結果が合っているかを確かめる過程において、何度も改良を加えながら答えに接近することができる。こうした学習の積み重ねによって、生徒は数学の有用性を実感できるようになるのである。

数学的モデリングに代表されるような数学を使った探究的な学習は、先進的な理数教育を実施するSSH指定校などで組まれてきた。むしろ、今日では変化の激しい社会に対応していくために、生徒自ら問題を見出し、客観的に妥当な方法を用いて問題解決できる人材の育成が求められている（内閣府，2016）。さらに、2022年度からは新教科「理数」が高等学校

に設置されたことから、数学を使った探究的な学習をより一層推進できるようになった。そこで、数学を主軸とした科学的手法に基づいて真理を追究する「数学的探究」を遂行する力を身に付けさせることが重要ではないかと考えた。

「数学的探究」とは、様々な現実事象に対して数学的な観点から問いを立て、客観的に妥当な方法を用いて問題解決することである（葛城・黒田・林，2017）。数学的探究の過程は、(1) 問題発見、(2) 計画、(3) 情報収集、(4) 情報整理、(5) 数学的処理、(6) 振り返りの6つの段階で構成される（詳細は3.2.で述べる）。筆者らは、数学的探究の過程を遂行できる力の育成を目指して、折り紙を用いた教材開発と高校生80名に教育実践を行った（葛城・黒田，2020）。「水槽に浮かべた折り紙の船に重りは最大何個まで積載できるか」という折り紙の構造を分析する問題を6コマで取り組んだ。折り紙を用いて様々な折り方を試すことは、生徒自身で数学の解法を見出したり、得られた結果を解釈・検証したりできる点で効果的であった。

上記の実践では、教師が数学的探究の(1)～(4)の道筋を示し、生徒が(5)～(6)を重点的に取り組んだ。今後は、折り方を工夫して新たな問題の設定につながったり、数学的に質の高い内容を取り上げて解決したりするなど、生徒自身で数学的探究の過程を遂行できるような新規教材を開発する必要があると考えた。これらを効果的なものとするための教材として、1枚の紙でもものづくりが行える「折り紙」を取り上げる。

単なる試行錯誤による作品製作ではなく、設計段階から正しく数学を用いて、目的とする作品を精度高く創造・構築することは、数学が現実事象に果たす役割の理解にもつながるのではないかと考えた。

2. 研究目的

本研究の目的は、折り紙を用いたものづくりを通して、高校生が数学的探究を遂行できるようになるための教材開発を行うことである。

3. 折り紙を用いた教材開発

3.1. 題材

折り紙は古くからの日本の伝承文化であるが、近年は折り紙の数理的な研究が進み、その理論やコンピュータによる設計が、観光地図や缶コーヒーなどの実生活にも応用されている(野島・萩原ら, 2012)。今回は、折り紙の研究から生まれた「おりがみカップ」に着目する。図1のように、おりがみカップは1枚の紙でできており、紙の開閉が容易である(株式会社シンメイ, 2020)。そのため容器や皿などとして幅広く使用することができる。使用後は、紙をコンパクトに折り畳んで廃棄ができるため、容器の減容化にも貢献している。また、糊付けもなく環境にエコである。おりがみカップは、三角形の相似や余弦定理などの数学に基づいて展開図が設計・分析されており、工場でのライン生産を可能としている(川崎ら, 2005)。



図 1：おりがみカップ

3.2. 分析

本研究では、3.1.のおりがみカップを改変した「折

り紙容器」の製作を行った。以降では、筆者らが考案した数学的探究に従って折り紙容器を分析する。

1章で述べたように、数学的探究の過程は6つの段階で構成される。図2はそれらを図式化したものである。本過程の大まかなの流れとしては、現実事象の中から問題を想起・理解し明確化する。その解決手法を考え、必要な情報を集約・整理する。整理された情報をもとに、数学を使って結果を導出し、その結果を検証して問題の答えを決定するというものである。

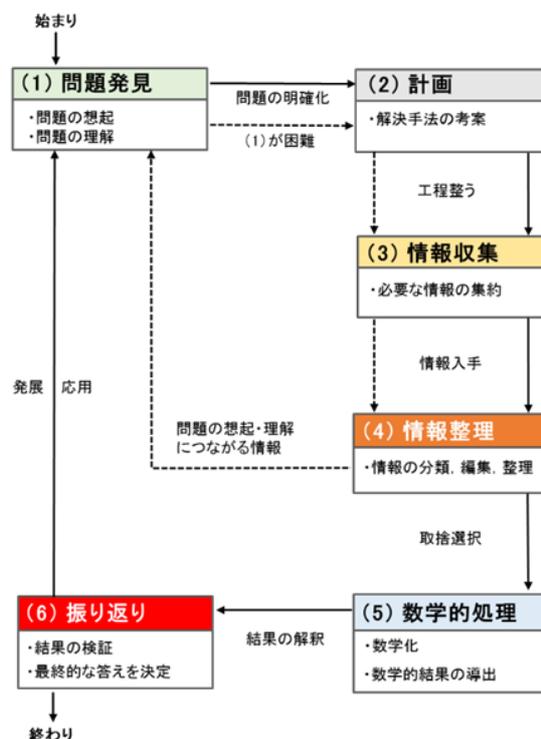


図 2：数学的探究モデル

折り紙容器の分析結果を、数学的探究の段階に沿って概説する。

「(1) 問題発見」について、食品包装容器の製造・メーカーでは、SDGsや環境問題への取り組みが求められている。そこで、問題を「環境に優しい紙を使って用途に見合った容器を製作すること」と設定する。

「(2) 計画」では、仮説として「既存の紙製容器の構造を改変することで、異なる容器を製作できる」と決定する。具体的な解決の流れについては、各段階で述べる。

「(3) 情報収集」では、3.1.で概観したおりがみカップに加えて、食品包装容器や折り紙研究についても論文、書籍、インターネットなどから情報収集する。

「(4) 情報整理」では、(3)で得られた情報をもと

に、折り紙容器の展開図の設計に必要な仮定や条件を決定する。

「(5) 数学的处理」では、設定した仮定・条件に基づいて展開図を設計し、折り紙容器の寸法などを算出する。図3は、動的幾何学ソフト「GeoGebra」を用いて設計した展開図である。上縁が綺麗に揃った折り紙容器（「サンプル容器」と呼ぶ）を製作するために、紙を使って試行錯誤するだけでなく、展開図の設計段階から数学を用いて分析する。実際に、容器の上縁が揃うことは図形の定義・性質を使って説明することができ、紙を折るという行為によって確認もできる。さらに、GeoGebraは展開図を構成する図形の辺の長さや角度を変えることができるため、サンプル容器以外の折り紙容器の設計にも対応できる。

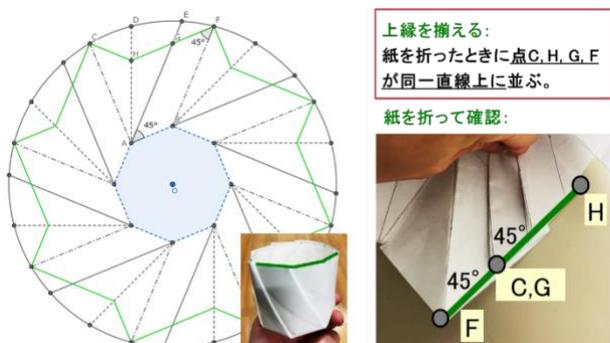


図 3 : 展開図と折り紙容器

折り紙容器の寸法を求める際にも、数学を利用する。寸法の立式や処理については、手計算で行うことは困難であるため、図4のように表計算ソフト「Excel」を利用する。ここでは、三角比の定義、三角形の正弦定理・余弦定理などを画面に手入力し、複雑な計算はソフト自体に行わせて、得られた数値が妥当であることを確かめる。図内の四角囲みのように、数学的な内容や構造を画面上から確認できるため、これらを理解した上での条件変更や修正が可能である。

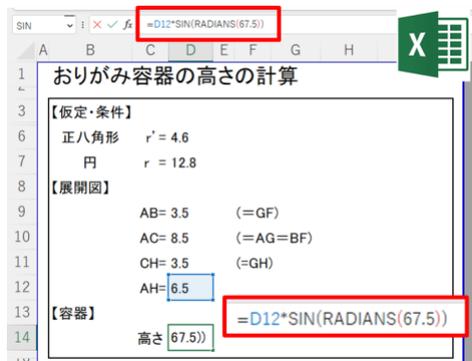


図 4 : Excel を用いた寸法計算

「(6) 振り返り」では、実際に設計した展開図を紙で印刷し作品を作ってみて、(1)の問題が解決できたかを検証する。例えば、図5のように、蓋がぴったり重なるようにサイズ変更した容器（左図）や紙自体が蓋になる容器（右図）などを作ることができる。



図 5 : 折り紙容器の例

3.3. 授業計画

ここでは、本研究で提案する授業計画を概説する。対象は、高等学校第1学年以降（「数学 I」の三角比を学習済み）であり、少人数のグループでの実施を想定している。表1は、計9時間の授業計画案をまとめたものである。前半の部は「サンプル容器の製作」に120分、後半の部は「アレンジ容器の製作」に420分を予定している。

前半の①では、環境に配慮した新たな容器を製作することを問題提示する。この問題を数学で解決する必要性に気付かせるために、食品包装容器の現状と課題について取り上げる。②では、容器を開発するために、紙製の既存商品の設計方法を改変することで容器を作れないかと仮説を立て、それを解決するための流れを説明する。③では、3.2.で取り上げたサンプル容器の製作を通じて、展開図の仮定や条件の置き方やGeoGebraの操作方法を理解させる。④では、サンプル容器の寸法を求めるための数学の扱い方や、Excelの操作方法を理解させる。

後半では、前半で学習した内容をもとに、生徒主体で数学的探究の過程を次のように取り組ませる。⑤では、生徒自身でアレンジ容器を製作するために必要な情報を書籍、論文、インターネットなどから収集しアイデアを整理させる。⑥では、考えたアイデアを折り紙容器にするための仮定や条件を考えさせる。例えば、サンプル容器の展開図の仮定や条件を活用し、GeoGebraを使って設計することが考えられる。⑦では、アレンジ容器の寸法の一般化に取り組みせることで、どのようなサイズの紙に対しても対応できるようにする。⑧では、数学的探究の遂行過程を振り返らせるために、⑤～⑦について成果発表させる。

表1：本研究で提案する授業計画

学習項目	学習活動	数学的探究の過程
【前半の部】		
①問題場面の作り出しと問題設定	・生徒は食品包装容器製造・メーカーの社員と設定する。 ・「環境に配慮した新たな容器を開発すること」の問題に取り組むことを知る。 ・食品包装容器の現状や課題について学ぶ。	「(1) 問題発見」 「(3) 情報収集」
②本授業で取り組む課題と解決の流れ	・①をもとに課題を「環境に優しい紙を使った既存商品を改良し、別の用途に見合った容器を開発すること」と設定する。 ・今回はおりがみカップを参考にしたサンプル容器から設計方法を学び、それを改変してアレンジ容器を製作することを学ぶ。	「(2) 計画」
③サンプル容器の試作	・教師（上司）がサンプル容器の展開図の仮定や条件を説明し、それをもとに展開図を作図する。作図した展開図からサンプル容器を試作する。	「(4) 情報整理」 「(5) 数学的処理」
④サンプル容器の分析	・サンプル容器の寸法（高さと口径）を数学とExcelを用いて求める。 ・求めた数値通りのサンプル容器が製作できるかを、紙を折って確かめる。	「(5) 数学的処理」 「(6) 振り返り」
【後半の部】		
⑤アレンジ容器を考案	・用途に見合った容器を製作するために、実生活で扱われている食品包装容器について情報収集する。情報収集にはインターネット、著書、論文等を利用する。 ・収集した情報を整理し、展開図を設計する際に必要となる仮定や条件を設定する。	「(1) 問題発見」から 「(4) 情報整理」まで
⑥アレンジ容器の設計	・⑤をもとに容器の展開図を設計する。 ・GeoGebraで設計した展開図をもとにアレンジ容器を試作する。	「(5) 数学的処理」 「(6) 振り返り」
⑦アレンジ容器の分析と製作	・アレンジ容器の寸法の公式をつくり、公式をExcelに入力する。 ・Excelに数値を代入して具体値を求める。 ・用途に見合う紙を選択し、アレンジ容器の完成品を製作する。	「(5) 数学的処理」 「(6) 振り返り」
⑧発表	・⑤～⑦をレポートにまとめて他者に発表する。	過程全体

4. まとめ

本研究では、折り紙を用いたものづくりを通して、高校生が数学的探究を遂行できるようになるための教材開発を行った。本教材がもたらす期待効果としては、次の2点が考えられる。

- 1) 変化が激しく複雑化する社会の問題に対して、数学の活用と実物検証による科学的手法を用いて解決するという思考法を習得できるようになること。
- 2) 設計段階から正しく数学を用いることで、目的とする完成品を精度高く創造・構築できるといった数学が現実事象に果たす役割を理解できるようになること。

今後の課題は、高校生を対象に教育実践と認識調査（客観テスト、アンケートなど）を行って、本教材の有効性を検証することである。

付記

本研究は、JSPS科研費 奨励研究(JP22H04097, 葛城元)の助成を受けたものである。

参考文献

株式会社シンメイ (2020). おりがみカップ, 株式会

社シンメイホームページ, 1-2.

<https://www.shinmei-pac.co.jp/product/lunchbox/lunchbox05.html>(2023.2.22.現在)

葛城元・黒田恭史・林慶治 (2017). 数学教育における知識創造を目指した数学的探究モデルの設計と教育実践, 知識共創, 7, IV3.1-13.

<http://www.jaist.ac.jp/fokcs/>(2023.2.22.現在)

葛城元・黒田恭史 (2020). 数学的探究の習得を目指したオリガミクスによる高校生への教育実践—船の荷物積載を題材として—, 数学教育学会誌, 61, 1・2, 59-69.

川崎敏和監訳 (2005). 折り紙の数理と科学, 森北出版, 東京, 141-146.

内閣府 (2016). 科学技術イノベーション総合戦略 2016, 内閣府ホームページ.

<https://www8.cao.go.jp/cstp/sogosenryaku/2016/honbun2016.pdf>(2023.2.22.現在)

野島武敏・萩原一郎編著 (2012). 折紙の数理とその応用, 共立出版, 東京.

柳本哲 (1989). 数学教育における課題学習への試み—中学生によるティーカップの製作—, 大阪教育大学数学教育研究, 18, 19-30.

横地清 (1986). 教師に必要な数学の実習について, 数学教育学会研究紀要, 27, 1・2, 5-16.