デジタル時代の新・剰余定理について

New Approach in High School Mathematics by Matrices

高木和久
高知工業高等専門学校　ソーシャルデザイン工学科

「数理、データサイエンス、AI」の基礎は、デジタル社会の「読み、書き、そろばん」であると言われている。本研究では剰余定理を拡張し、割り算を高速に行うことができるようになった。そして大学入試に頻出する問題を、行列と割り算を用いて解く新しい方法を発見した。

キーワード：AI，線形代数，行列，剰余定理，大学入試問題

1.　はじめに

人工知能(AI)の開発では先行する米国、中国に比べて日本はかなり遅れを取っている。例えばビジネスへのAIの導入は米国が13.3%であるのに対し、日本は1.8%に過ぎない。この原因の一つはエンジニアの不足であり、2020年にはAI人材が約4.7万人不足する見込みである。([1])

2019年4月に内閣府で行われた「総合科学技術・イノベーション会議（第43回）」では、デジタル社会の「読み、書き、そろばん」である「数理、データサイエンス、AI」の基礎などの必要な力を全ての国民が育み、あらゆる分野で人材が活躍する社会を目指す、としている。([2])

高等学校では基礎的リテラシーを習得し、大学では2025年までに全学生が「数理、データサイエンス、AI」の基礎を習得可能となる。

AIの理解に必要な数学は色々あるが、高等学校のレベルで学べるものは「線形代数、微分積分、確率統計」である。そして線形代数に関しては行列についての理解が不可欠である。それゆえ、今後は高等学校の数学においても、行列についてより深く学ぶための教材が必要になってくる。

本論文では、剰余定理を割る式が2次以上の場合に拡張し、割り算を用いる大学入試問題を行列を用いて解く方法を紹介する。

2.　剰余定理とその拡張

剰余定理とは、次の定理の名称である。

<u>定理1</u>　$P(x)$を$x-p$で割った余りは$P(p)$である。

m,nを0以上の整数とするとき、剰余定理は次の定理2、3に拡張できる。

<u>定理2</u>　$P(x)+mx^n(x-p)$を$x-p$で割った余りは$P(p)$である。

<u>定理3</u>　$P(x)+mx^nQ(x)$を$Q(x)$で割った余りは$P(x)$を$Q(x)$で割った余りと一致する。

本論文では、定理3を新・剰余定理と呼ぶことにする。

さて、大学入試では割り算を実行して解く問題が多数出題される。例えば、次の問題を解いてみよう。

<u>問題１</u>　$x=2+3i$のとき$x^3-6x^2+16x-3$の値を求めよ。（広島修道大 2014）

<u>通常の解法</u>

$x=2+3i$　は2次方程式　$x^2-4x+13=0$の解である。$x^3-6x^2+16x-3$を$x^2-4x+13$で割ると余りが$-5x+23$となるので、答は$-5(2+3i)+23=13-15i$である。

途中に割り算が入るため、この問題を解くには時間と手間がかかり、また割り算の部分でミスが生じやすい。割る式が1次式であれば組立除法を使って簡単に余りを求める事ができる。そこで、組立除法に似た計算で、割る式が2次以上の場合にも余りを素早く求めることのできる方法を考案した。

$P(x)=x^3-6x^2+16x-3, Q(x)=-(x^2-4x+13)$ とおく。$P(x)+xQ(x)=-2x^2+3x-3$を$Q(x)$で割った余りは$P(x)$を$Q(x)$で割った余りと一致する。

これを次のように書く。

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & -6 & 16 & -3 & \quad P(x) \\ -1 & 4 & -13 & & \quad xQ(x) \\ \hline 0 & -2 & 3 & -3 & \quad P(x)+xQ(x) \end{array}$$

次に、$P(x)=-2x^2+3x-3$とおく。$P(x)-2Q(x)=-5x+23$を$Q(x)$で割った余りは$P(x)$を$Q(x)$で割った余りと一致する。これを次のように書く。

$$\begin{array}{rrrl} -2 & 3 & -3 & \quad P(x) \\ -1 & 4 & -13 & \quad Q(x) \\ \hline 0 & -5 & 23 & \quad P(x)-2Q(x) \end{array}$$

$-5x+23$が求める余りである。まとめると

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & -6 & 16 & -3 & \\ -1 & 4 & -13 & & \\ \hline 0 & -2 & 3 & -3 & \\ & -1 & 4 & -13 & \\ \hline & 0 & -5 & 23 & \end{array}$$

となる。上記の計算の中には商 $x-2$ が隠れている。商を見やすくするために$Q(x)$の先頭の-1を省略して次のように書くことにする。

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -6 & 16 & -3 \\ & 4 & -13 & \\ \hline & -2 & 3 & -3 \\ & & 4 & -13 \\ \hline & & -5 & 23 \end{array}$$

<u>問題 2</u>　$x=5+3i$ のとき$2x^5-20x^4+68x^3-x^2+10x-83$ の値を求めよ。（早稲田大 2009）

<u>解</u>　$x=5+3i$ は2次方程式 $x^2=10x-34$を満たす。割り算を実行すると

$$\begin{array}{rrrrrr} 2 & -20 & 68 & -1 & 10 & -83 \\ & 10 & -34 & & & \\ \hline & 0 & 0 & -1 & 10 & -83 \\ & & & & 10 & -34 \\ \hline & & & & & -49 \end{array}$$

これより

$$\begin{aligned} &2x^5-20x^4+68x^3-x^2+10x-83 \\ &\quad =(2x^3-1)(x^2-10x+34)-49 \end{aligned}$$

となるので求める値は-49である。

<u>問題 3</u>　n を 2 以上の自然数としてx^n を$(x-1)^2$で割ったときの余りを求めよ。（関西大 2007）

<u>解</u>　x^2 を$(x-1)^2$で割ったときの余りは$2x-1$、x^3 を$(x-1)^2$で割ったときの余りは$3x-2$、x^4 を$(x-1)^2$で割ったときの余りは$4x-3$ であるので、x^n を$(x-1)^2$で割ったときの余りは$nx-(n-1)$であると予想される。この予想が正しいことをnに関する数学的帰納法で証明すれば良い。

割り算は次のようになる。

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & & \\ & 2 & -1 & & \\ \hline & 2 & -1 & 0 & \\ & & 2 & -1 & \\ \hline & & 3 & -2 & 0 \\ & & & 2 & -1 \\ \hline & & & 4 & -3 \end{array}$$

<u>問題 4</u>　$f(x)=x^2-x+1$とする。x^3および$1+x+x^2+\cdots+x^{11}$を$f(x)$で割ったときの余りを求めよ。（東北学院大 2001）

<u>解</u>　下の計算より、x^3を$f(x)$で割ったときの余りは-1である。

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & \\ \hline & 1 & -1 & 0 \\ & & 1 & -1 \\ \hline & & & -1 \end{array}$$

また、下の計算より$\sum_{r=0}^{5} x^r$は$f(x)$で割りきれる。

$$\sum_{r=0}^{11} x^r=\sum_{r=0}^{5} x^r+x^6\sum_{r=0}^{5} x^r$$

であるから$1+x+x^2+\cdots+x^{11}$を$f(x)$で割ったときの余りは0である。

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & & & \\ \hline & 2 & 0 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ \hline & & 2 & -1 & 1 & \\ & & & 1 & -1 & \\ \hline & & & 1 & -1 & 1 \\ & & & & 1 & -1 \\ \hline & & & & & 0 \end{array}$$

3.　2 数のn乗の和を求める入試問題

2数のn乗の和を求める問題は大学入試によく出題される。次の問題を新・剰余定理を用いて解く。

問題 5　$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=1$ のとき$\alpha^5+\beta^5$の値を求めよ。（神奈川大 2012）

解　α,βは2次方程式$x^2=3x-1$の解である。

対称行列Aを

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

と定めると$A^2=3A-E$（Eは単位行列）が成り立つ。

A^5をA^2-3A+Eで割った余りは$55A-21E$であり、

$(1\quad 1)\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\alpha+\beta, (1\quad 1)\mathrm{A}^5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\alpha^5+\beta^5$

であるから、

$$\therefore \alpha^5+\beta^5=55(\alpha+\beta)-21(1+1)=123$$

この解法を数学的に考察する。$x^2=px+q$の解をα,βとし、行列Aを

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

と定めると$A^2=pA+qE$（Eは単位行列）が成り立つ。

関数f,gを

$$f(A)=(1\quad 1)\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, g(A)=(1\quad 1)\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

とおくと

$$f(A)=\alpha+\beta, f(A^n)=\alpha^n+\beta^n$$
$$g(A)=\alpha-\beta, g(A^n)=\alpha^n-\beta^n$$
$$f(E)=2, g(E)=0$$

が成り立つ。更に、f,gは線形写像となる。

問題 6　2 次方程式 x^2+x+2 =0の 2 つの解をα,βとするとき$\alpha^2+\beta^2$と$\alpha^5+\beta^5$の値を求めよ。（慶応大学 2005）

解　$\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=2$より

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-3$$

$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$とおくと$A^2=-A-2E$ であり

$A^5=-A-6E$であることから

$$\alpha^5+\beta^5=f(A^5)=-f(A)-6f(E)=-11$$

問題 7　$x+y=3, xy=-2$ のときx^2+y^2, x^3+y^3, x^5+y^5 の値を求めよ。（東洋大 2007）

解　x,yは$t^2=3t+2$の解である。$A=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}$と定めると$A^2=3A+2E$が成り立つ。

これより

$$x^2+y^2=f(A^2)=3f(A)+2f(E)=13$$
$$x^3+y^3=f(A^3)=11f(A)+6f(E)=45$$
$$x^5+y^5=f(A^5)=139f(A)+78f(E)=573$$

問題 8　$\alpha=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ のとき$\alpha^5-4\alpha^4+2\alpha^3-4\alpha^2+\alpha-2$の値を求めよ。（慶応大学 2005）

解　$\alpha=\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$である。$\beta=2-\sqrt{3}$, $A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ と定めると$A^2=4A-E$が成り立つ。

$A^5-4A^4+2A^3-4A^2+A-2$ を A^2-4A+E で割った余りは-2であるから答えは-2。

問題 9　$a^x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ のとき $\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$ の値を求めよ。（神奈川大 2014）

解　$\alpha=a^x=\sqrt{3}+\sqrt{2}, \beta=a^{-x}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ とすると$\alpha+\beta=2\sqrt{3}, \alpha\beta=1$ が成り立つ。そして

$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$と定めると$A^2=2\sqrt{3}A-E$が成り立つ。

$A^3=11A-2\sqrt{3}E$ であるから

$g(A^3)=g\left(11A-2\sqrt{3}E\right)=11g(A)-2\sqrt{3}g(E)$

$g(E)=0$であったから$g(A^3)=11g(A)$となり

$$\therefore \frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=\frac{g(A^3)}{g(A)}=11$$

問題 10　$a^{2x}=5$ のとき $\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$ の値を求めよ。ただし$a>0$とする。（茨城大 2010）

解　$a^{2x}=5$より$\alpha=a^x$とおくと$\alpha=\sqrt{5}$となる。

$\beta=a^{-x}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ とすると$\alpha+\beta=\frac{6}{5}\sqrt{5}, \alpha\beta=1$ が成り立つ。そして

$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$と定めると$A^2=\frac{6}{5}\sqrt{5}A-E$が成り立つ。

$A^3=\frac{31}{5}A-\frac{6}{5}\sqrt{5}E$ であるから

$$g(A^3)=\frac{31}{5}g(A)-\frac{6}{5}\sqrt{5}g(E)=\frac{31}{5}g(A)$$

$$\therefore \frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=\frac{g(A^3)}{g(A)}=\frac{31}{5}$$

4.　3数のn乗の和を求める入試問題

3次の行列を用いると、3数のn乗の和を求めることができる。α,β,γが $t^3=pt^2+qt+r$の解であるとき、

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$$

とおくと $A^3=pA^2+qA+rE$ が成り立つ。

$$f(A)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

と定めるとfは線形写像で$f(E)=3$が成り立つ。

<u>問題11</u>　$x^3+x^2-13x+3=0$ の3つの解をα,β,γとするとき$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$と$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$の値を求めよ。（近畿大学2009）

<u>解</u>　まず、

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=27$$

である。$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$と定めると

$A^3=-A^2+13A-3E$が成り立つ。

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=f(A^3)=f(-A^2+13A-3E)$$
$$=-f(A^2)+13f(A)-3f(E)=-49$$

<u>問題12</u>　$x^3-2x^2+3x-4=0$ の3つの解をα,β,γとするとき$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$と$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$の値を求めよ。（慶応大学2003）

<u>解</u>　まず、

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-2$$

である。$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}$と定めると

$A^3=2A^2-3A+4E$が成り立つ。

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=f(A^4)=f(A^2-2A+8E)$$
$$=f(A^2)-2f(A)+8f(E)=18$$
$$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=f(A^5)=f(2A+4E)$$
$$=2f(A)+4f(E)=22$$

5.　考察

問題9、10では $\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$ の値をgを用いて求めた。この方法を応用するとフィボナッチ数列の一般項を求めることができる。

フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ は漸化式

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

を満たす。$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,$\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とするとα,βは2次方程式$x^2=x+1$の解である。対称行列Aを

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

と定めると$A^2=A+E$が成り立つ。

例としてA^5をAとEで表わす計算を行って見よう。

1	0	0	0	0	0
	1	1			
	1	1	0		
		1	1		
		2	1	0	
			1	1	
			3	2	0
				1	1
				5	3

奇数行にはフィボナッチ数列が現れる。数学的帰納法により$A^n=F_nA+F_{n-1}E$が成り立つ事が証明できる。これより

$$g(A^n)=F_n\,g(A)+F_{n-1}\,g(E)=F_n\,g(A)$$
$$\alpha^n-\beta^n=F_n\,(\alpha-\beta)=\sqrt{5}\,F_n$$
$$\therefore F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

行列は微分積分や確率統計と比べて新しい分野である。過去には高等学校のカリキュラムから行列が外れた時期もあり、その発想は必ずしも日本人全体に浸透しているとは言い難い。日本国民の多くが数学にもっと関心を持ち、線形代数について学んでくれることを願っている。

参考文献

[1] 内閣府　政策討議（AI戦略）論点 2018年2月 https://www8.cao.go.jp/cstp/gaiyo/yusikisha/20180201/siryo1.pdf（2019年8月20日確認）

[2] 内閣府　AI戦略（人材育成関連）2019年4月 https://www8.cao.go.jp/cstp/siryo/haihui043/siryo1.pdf（2019年8月20日確認）

[3] 高木和久、余因子行列を用いた行列のべき乗の計算とその応用、高専教育第38号、PP.398-403、2015年3月