超準解析の世界観を動画で表現する試み

Visualizing Infinitesimals and Infinite Hyperreals

高木　和久
高知工業高等専門学校

微分積分の授業は、ともすると公式を覚えて計算のスキルを高めるだけの退屈な授業になりがちである。微分積分が誕生した頃には無限小という概念が盛んに用いられ、直感的な議論の中で様々な定理や公式が発見されていった。微分積分において深い学びを実現するためには、１７世紀に行われていた直感的な理解を復活させることが必要である。本研究では、無限小超実数や無限大超実数をビジュアルに表現する動画を作成し、高校生が微分や無限小といった概念を直感的に理解できるようにしたることができるようにした。

キーワード:微分積分，超準解析，無限小，超実数，動画

1.　はじめに

新学習指導要領では主体的で深い学びの実現が求められている。高等学校の数学の中では微分と積分はかなりの時間をかけて学習する内容であり、これらの単元をどのように指導してゆくかは重要である。

先人達が苦労して微分積分学を発展させてきた結果、微分と積分には多数の公式があり、それらを駆使して様々な分野の問題を解決してゆく所が微分積分の魅力である。

ところが、高等学校の実際の授業は、ともすると公式を覚えて、その覚えたての公式を使う練習問題を解いて計算のスキルを高める作業の退屈な繰り返しになりがちである。

具体例で見てみよう。次の公式は2つの関数の積で表される関数の導関数を計算する公式である。

公式

$$\frac{d(fg)}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

この公式の証明には通常、次の変形を用いる。

$$\begin{aligned} &f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) \\ &\qquad + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &= \{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) \\ &\qquad + f(x)\{g(x+h) - g(x)\} \end{aligned}$$

しかし、この変形はいかにも人工的・作為的であり生徒に証明を任せた場合、この変形を発見できる生徒はごく一部であると思われる。

微分積分が誕生した頃には無限小という概念が盛んに用いられ、直感的な議論の中で様々な定理や公式が発見されていった。例えば、現在日本の高等学校で教えられている微分積分では微分係数 $\frac{dy}{dx}$ は極限値として定義され、分子と分母は分離してはいけないものである。しかし 17 世紀には分子dyと分母dxは別々に取り扱うことができ、微分係数 $\frac{dy}{dx}$ は 2 つの無限小dyとdxの比として定義されていた。

無限小を用いると先述の公式は次の形で表される。

公式

$$d(fg) = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx$$

そして証明では

$$\begin{aligned} &\Delta(fg) = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \{f(x) + \Delta f\}\{g(x) + \Delta g\} - f(x)g(x) \\ &= \Delta f \cdot g(x) + f(x) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot \Delta g \end{aligned}$$

という変形が用いられる。

$$\Delta(fg) = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$$

および

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f,\ g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g$$

は記号の定義そのものであり、定義に従って式を変形するだけで、公式の証明を進めることができる。

微分・積分の授業で主体的で深い学びを実現するには、やはり無限小を用いた、微分積分の誕生当時の直感的な理解を復活させることが必要である。

2.　無限小の擬人化と見える化

人間ではないものを擬人化してキャラクターにする試みは以前から行われており、列車や車を擬人化したアニメや、元素や家電量販店の店舗など、擬人化が好評を得ているものが多く存在する。

そこで、無限小や無限大などの数学的概念を男女の高校生に擬人化する試みを行った。動画で使用したキャラクターの一部を図１に示す。

図１：動画で使用したキャラクターの一部

ところで、微積分の発見者の一人、ライプニッツ(1646-1716)は無限小の事を「欲すれば欲するだけ小となる変動する量である」と述べている。一方、数学者コーシー（1789-1857）は無限小を「0 に収束するような変数」と表現している。つまり、昔の数学者は無限小を、どんどん小さくなって 0 に近づいてゆくものとして捉えていた。よって無限小を視覚的に表現する際には動画を用いる事が効果的である。

無限小は１つではなく様々な種類が無数にある。本研究では、$z=\sqrt{x^2+y^2}$ のという２変数関数のグラフで表わされる無限小に注目し、これを α で表すことにした。(図 2)

ライプニッツが述べているように、無限小は変動する量である。従って、円錐という１つの図形ではなく、円錐形の容器の中の砂が原点に吸い込まれていくような動きで無限小を表現した。

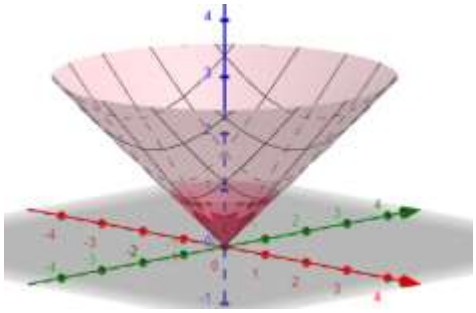

図２：基本の無限小 α

通常の実数rは、中心の座標が $(0,0,r)$であるようなz軸に向かって収束してゆく水平な円で表す事にした。

さて、αが正の無限小であるならば、αはいかなる正の実数よりも小さいはずである。この性質が成り立っているかどうかを検証しよう。

図3と図4は、実数１と無限小 α を同時に表示したものである。

最初は円錐と円板が交わっていてどちらが大きいとも言えないが（図3)、時間が経過して両者がz軸に近づくと、円板が円錐全体よりも上になり、大小関係がはっきりわかるようになる。(図4)

そして、1だけでなく、いかなる正の実数rに対しても最終的に円板が円錐より上になることから不等式 $\alpha<r$ が成り立つことがわかる。

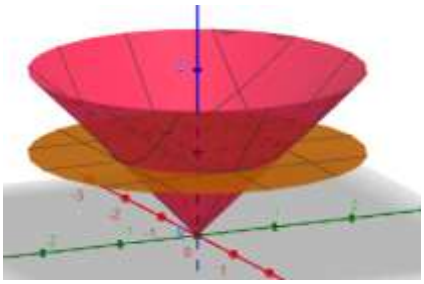

図３：無限小 α と実数１

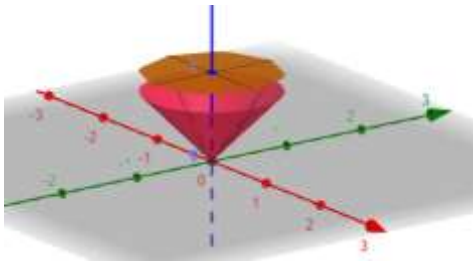

図４：無限小 α と実数１
（大小関係がはっきりした状態）

3.　超実数の構成方法

微積分の発見当初には大いに活用され、その発展に貢献した無限小の概念は、20 世紀の半ばにはごく一部を除いて利用されなくなっていた。しかし、1960 年代にアメリカの数学者ロビンソン(1918-1974)が、無限小を活用して直感的な議論で微分積分の理論を構築できることを示した。彼の微積分は non-standard analysis（日本では超準解析）と呼ばれている。

本研究では当初、ロビンソンの理論をそのまま借用して無限小の動画を作成する予定であった。ところが第 2 章で述べたような、z軸に向かって収束してゆく図形で無限小や無限大を表すことは、ロビンソンの考案した超準解析では実現できない事が判明した。しかし幸いにも、部分的に修正を加えることで数学的に問題のない体系を構築することができた。

以下、超実数の構成方法を具体的に述べる。詳しくは参考文献［高木］(2019)の第 9 章を参照されたい。

まず、実数体をRで表す。Rの部分集合からなる集合Fが次の3つの条件を満たすときにFはfilterである、という。

1. $X\epsilon F, X \subseteq Y \subseteq R \rightarrow Y\epsilon F$
2. $X\epsilon F, Y\epsilon F \rightarrow X \cap Y\epsilon F$
3. $R\epsilon F$

空集合を含まない filter を proper filter と呼ぶ。集合Fについて、Fの部分集合を任意有限個とって$A_1, A_2, \cdots, A_n$としたとき、常に

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$$

が成り立つとき、Fは有限交差性(finite intersection property)を持つという。

Fを任意のfilterとする。Fが条件

$$\forall X \subseteq R\ [\ X\epsilon U \vee X^C\epsilon U\ ]$$

を満たすとき、F をultrafilterと呼ぶ。

0を左端とする開区間の全体をNとおく。式で表すと

$$N = \{(0, r); r\epsilon R, r > 0\}$$

となる。集合Pを

$$P = \{X \subseteq R; \exists\, r > 0\ [\ (0, r) \subseteq X\ ]\}$$

と定めるとPはNを部分集合として含む proper filter となる。次に、Pから出発して

$$P = Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \cdots \subseteq Q_i \subseteq \cdots \subseteq Q$$

を満たす集合の列$\{Q_i\}_i$を作る。

$\beta < \alpha$に対し、関数$f: \alpha \rightarrow 2^R - P$を全単射になるようにとり、集合の列$\{Q_\beta\}_{\beta<\alpha}$を次のように作る。

1. $\beta = 0$のとき　　$Q_\beta = Q_0 = P$
2. $\beta = \gamma + 1$のとき
   （case 1）$Q_\gamma \cup \{f(\beta)\}$ が有限交差性を持つ時
   $Q_\beta = Q_\gamma \cup \{f(\beta)\}$
   （case 2）$Q_\gamma \cup \{f(\beta)^C\}$ が有限交差性を持つ時
   $Q_\beta = Q_\gamma \cup \{f(\beta)^C\}$
   （case 3）それ以外の時
   $Q_\beta = Q_\gamma$
3. β が limit ordinal のとき $Q_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} Q_\gamma$

そして $Q = \bigcup_{\beta<\alpha} Q_\beta$ と定める。

最後に、Rの部分集合Xで、Qの元が有限個$A_1, A_2, \cdots, A_n$存在して

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \subseteq X$$

が成り立つものを全部集めてUとするとUはultrafilterになる。

このultrafilter Uを用いて超実数体R^*を次のように作る。R上で定義された実数値関数の全体をR^Rで表すことにする。$f: R \rightarrow R$と$g: R \rightarrow R$について、関係$f \equiv g$を次のように定めると≡は同値関係となる。

$$f \equiv g \quad \leftrightarrow \quad \{t\epsilon R; f(t) = g(t)\}\, \epsilon\, U$$

R上で定義された実数値関数f, gについて、$f \equiv g$が成り立つ時、この2つを同じ元とみなす。こうして得られるR^Rの同値類を超実数と呼び、その全体をR^*で表す。更に、2つの超実数 f, gについて$f = g$ と $f < g$ を次のように定める。

<u>定義</u>　f, gをR^*の同値類の代表元とする。

1. $f = g \quad \leftrightarrow \quad \{t\epsilon R; f(t) = g(t)\}\, \epsilon U$
2. $f < g \quad \leftrightarrow \quad \{t\epsilon R; f(t) < g(t)\}\, \epsilon U$

$f \leq g$や$f > g$なども同様に定める。

UがNを含んでいることにより、原点の近傍で$f(t) < g(t)$が成り立っていれば、$f < g$ が成り立つ。原点の近傍における大小関係のみで超実数の大小関係が決まるので、ライプニッツやコーシー達の持っていた直感を生かしながら微分積分の理論を展開する事が可能となる。

4.　関数の極限値の見える化

R^*の元 $f:R\to R$の visualization vを

$$v(f)(x,y)=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

と定める。また、2変数関数 $z=f(x,y)$ に対し、$f(0,0)$の値をそのstandard part と呼び、記号 $\mathrm{st}(f)$で表す。$f(0,0)$の値が存在しなくても、点(x,y)を原点に限りなく近づけた時の極限値が存在すれば、その値を$\mathrm{st}(f)$と定める。

図5は$z=\cos\sqrt{x^2+y^2}$のグラフである。

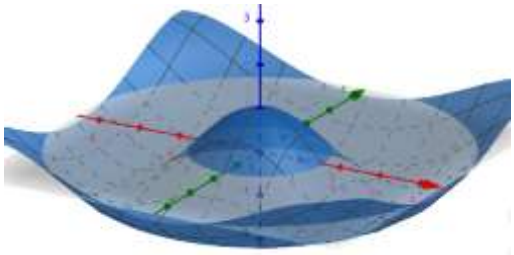

図 5：$z=\cos\sqrt{x^2+y^2}$ のグラフ

$z=\cos\sqrt{x^2+y^2}$の standard part は1であるが、この値は $x\to 0$ のときの$\cos x$の極限値と一致する。一般に $x\to 0$の時の$f(x)$の極限値はfの visualization のstandard partに一致する。この事を用いて、関数の極限を視覚的に表示して生徒の理解を深めることができる。

以下に関数の極限値の視覚的な表示の例をいくつか挙げる。

例 1　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\mathrm{st}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\right)=0$

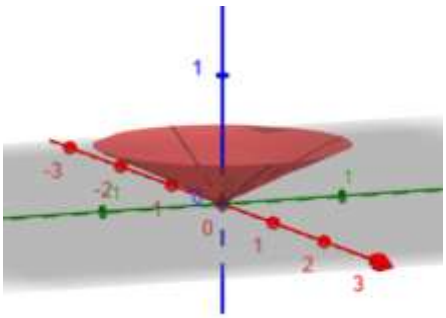

図 6：$\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}$ のグラフ

関数の極限値は 0 である。これは超実数 $\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}$ が無限小であることに対応している。

例 2　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\mathrm{st}\left(\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}\right)=2$

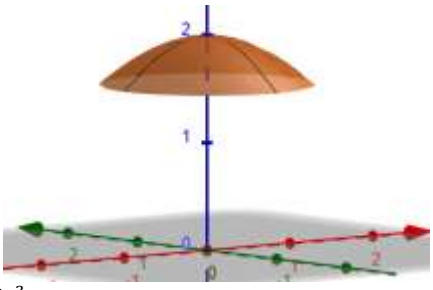

図 7：$\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$ のグラフ

例 3　$\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x}\log x=\mathrm{st}\left(\sqrt{\alpha}\log\alpha\right)=0$

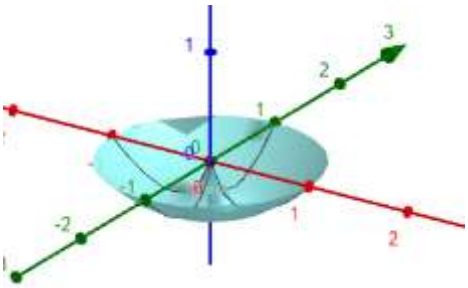

図 8：$\sqrt{\alpha}\log\alpha$ のグラフ

極限が同じであっても、収束の仕方は関数によって異なる。3次元のグラフを描画できるソフトウェアを使って関数の極限を視覚的に表し、更に収束の様子を動画にすることで極限や微分に対する生徒の興味・関心を高め、理解を深めることができる。

なお、本研究の一部は日本学術振興会の科学研究費(課題番号16K00993)“スマートデバイスによる動画再生を活用する高専数学の実践的研究”の補助を受けて行われた。

参考文献

高木和久(2019).これならわかる超準解析 http://www002.upp.so-net.ne.jp/hyperreal/index.html（2019.2.20 確認）

Robert Goldblatt (1998), Lectures on the Hyperreals, Springer

H.Jerome Keisler(2012).Elementary Calculus(An Infinitesimal Approach), Dover books on mathematics