Isabelle/HOLを用いたユークリッド原論の定理証明

On the Proof of Theorem of Euclid's Elements using Isabelle/HOL

岩間 詞也*・高橋 正**
甲南大学大学院自然科学研究科*・甲南大学知能情報学部**

ソフトウェアを用いて数学の定理の証明を行うことについては，多くのソフトウェアが開発されている。このような研究は，自動定理証明と呼ばれている。定理証明ソフトIsabelle/HOLを用いて，ユークリッド原論の第一巻の定理1～48の証明を行い，次の段階として，原論の第二巻以降の定理証明を行なっている。この研究を知能情報学における研究と位置づけ，数学教育に成果を応用することを目指す。

キーワード：数学教育，Isabelle/HOL，ユークリッド原論，定理証明

1.　ユークリッド原論

現代数学の特徴は公理と呼ばれるいくつかの命題を前提にして他の命題を証明し「演繹的体系」として構成することである。この意味での数学の始まりは，古代ギリシャにおける幾何学である。「図形の論証」は，ユークリッドの『原論』に始まる。エジプトの測量術に端を発しタレスが理論的に研究したものが幾何学の始まりであるといわれている。それを書物としてまとめたものがユークリッドの『原論』である。

「演繹的体系」を構成するうえで証明なしに使われる基本的な命題である「公理」として，ユークリッドの『原論』では，幾何学的性質である５つの「公準」と，一般的な８つの「公理」が挙げられている。(Fitzpatrick R)

2.　数学教育における論証の意義

数学の問題は求答問題と証明問題のどちらかの型に分類でき，証明問題は類推力や帰納力を養うことに役立ち，直感をはたらかせ，状況を理解するという人間の知性の大切なはたらきである。公理的構成の考えの育成に関する幾何学習の価値は高い。イギリスの数学教育に大きな影響を与えた JMC は８つの事項を挙げ，その１事項として「特に幾何学的文脈において，役に立つ ICT の技術を発達させること」を挙げている。さらに，イギリスのハウソンは，日本だけが中等学校段階で，全ての学習者に証明の指導を行っていることを特記し，それはよい成果を収めえないであろうと述べている。(G. Howson (2000))

1990年代には，ICMI が幾何の学習指導に関する研究を開始したが，意見は発散してしまっている。(Mammana, Carmelo, Villani, V. (Eds.) (1998)) 目的・内容や方法に関する同意のなさが存在しているが，ユークリッド流の証明は，そこで行われる数学的推論が重要であるという主張は一層強くなっている。

3.　日本での数学教育における論証の意義

日本の数学教育において，「論証」及び変数としての「文字式」の使用は、数学の中心的な内容である。「図形の論証」は，日本の教育課程において1950年代の後半から中学校数学科の中心的な指導内容の一つになっている。

「図形の論証」の学習においては，数学の学習方法の獲得も目指している。「図形の論証」が数学教育における主要な教材であるのは，「図形が意味のレベルで代数記号と日常言語をつなぐという本質的な役割」を持っていることに依拠している。

変数としての「文字」に関して文字式は数学の対象や道具として不可欠である。「代数の論証」においては文字式を使って演繹的推論を繰り返すことになる。文字式の計算は一般的に説明するという論証を支えるものであり，こうした文字式と論証の関係はカリキュラムにも反映されている。中学校数学科においては「式の利用」という小項目の元で「文字式による論証」が取り上げられ，高等学校数学科においては，等式や不等式の成り立つことが，主として式変形によって証明され，また，自然数全体がもつ性質の確認

の方法として数学的帰納法が扱われる。

論証を，図形レベルで取り扱うにしろ，文字使用で扱うにしろ，それは学校数学にとって不可欠で中心的な内容である。文字式計算の一行一行の背後には，計算法則や数学概念が潜んでいる。

初等幾何学を学習することのよさは，公理や定義を根拠にして命題が真であることを演繹的な推論によって示すという，数学の方法を特徴付ける格好のモデルを与えることである。図形の論証の学習指導において，冒頭に現れる「平行線の性質と条件」は，小学校算数科において三角定規を使って平行線を描いたことを認め，その性質と条件をまとめることである。命題が真であることを，何を根拠にして説明し，「既に認められた事柄や定義を根拠として，命題が真であることを演繹的な推論によって示す」という論証することの意味をとらえるために重要である。

これに続いて「三角形の合同条件」が合同な三角形を作図することから導かれ，推論の根拠として位置づけられる。図形の論証の学習では，公理に相当する命題を明確に示すことができる。自己の主張の正当性を根拠に基づいて説得する手段である「論証」の学習は，思考力や表現力の育成にも重要な役割を担う。「論証」(demonstration) とは，形式的に定義される概念」であり「既知の命題から，論理的手順に従って，新しい命題を導き出すこと」であり，「証明 (proof) といわれるものは，論証をさまざまの程度に略記したものと考えられる」がある。我々は，「論証」を，「既に認められた事柄や定義を根拠として，命題が真であるということを演繹的な推論によって示すこと」と規定する。

代数では言葉は文字や記号で表され，思考は式の演算におきかえられるので，生のままの思考の形をとらえるのはかえって難しい。これに反し幾何では生のままの言葉で思考し，その対象も多くの場合があるので最も都合がよい。図形の論証の学習指導については，次の 1)～5) の意義がある。

1)　演繹的な推論の方法もモデルを与える

「公理」に基づいて演繹的推論を重ねていくという数学のよいモデルを与えている。真であると示された命題が個々別々に存在するのではなく，互いに関連していて１つのシステムを作っていることを知ることができる。

2)　言語活動が行われ，数学的な思考力・表現力を育成する

ユークリッド幾何学の体系化がギリシャにおける民主社会での議論の方法から少なからず影響を受けたことを考えると，論証の学習指導は「根拠を明らかにして自分の考えを述べる」という能力を身に付ける適切な場を与える。

3)　数学的推論能力を育成する

図形指導では，図を頼りに推論を進めることができる。したがって，推論を進めるうえで具体的なイメージをもつことができ，直観と論理が十分に発現されて学習が進められる。つまり，帰納的推論，類比的推論や演繹的推論が十分に行われる場を与える。

4)　主体的・探究的な活動を促す

証明問題よりも決定問題を通して学習を進めることによって，より一層，探究的な学習態度を養うことができる。

5）数学の美しさを感得することができる

1)は論証教材そのものがもつ意義であり，2)，3)，4)は論証学習による能力育成やそこでの学習者の活動に関する意義であり，5）は情意面に関する意義である。

4.　日本の論証指導の問題点

日本の数学教育における中１ギャップは「論証」と「文字式」の学習指導にあると考えられている。中学校数学科での「図形の論証」の学習においては，例えば角の大きさを測ったり紙を切って一か所に集めたりして「三角形の３つの角の和は180°である」と結論づける実験・実測による方法では不十分であるとして，証明による理由付けが要求される。なぜ証明するかが理解されないまま学習が進められているという問題点がある。

ある性質が成り立つことを示すのに文字式で表現し目的にあった式変形を行なって説明することができるようになるとともに，そうすることの意義を理解することは，容易なことではない。

5.　Isabelle/HOL への実装

実際にIsabelle/HOLを用いてユークリッド原論の定理証明を行うにあたり，その公理や公準，型の指定などをIsabelle上で扱える形に定義する必要がある。

ここでは，ユークリッド原論Book1の命題1の証明に必要な部分を抜き出すこととする。

5.1. 型の宣言

点, 線分, 円についての型宣言は以下のようになる。

```
datatype point = "char"
datatype segment = Se "point" "point"
datatype circle = Ci "point" "point"
```

点を一つの文字データ, 線分は二つの点, 円は中心点と円周上の一つの点でそれぞれ表現される。

5.2. 関数の実装

先に宣言した型が，線分や円という性質を持った型であることを関数の形で表現する。

まずは線分の関数について, Isabelle上での表記を示す。

```
locale dist =
fixes ldist :: "segment => segment => bool"
        (infixl "[@]" 50)
assumes dist ref [simp,intro] : "s1 [@] s1"
and dist rev1 : "[[s1 [@] s2]] ==> s2 [@] s1"
and dist rev3 : "[[(Se x1 y1) [@] (Se x2 y2)]]
        ==> (Se x1 y1) [@] (Se y2 x2)"
```

最初のlocale文が関数の名前を示し, 続くfixes文は, 以下「AB [@] CD」とすることで,「線分ABと線分CDが等しいとき」を表すとしている。その後のassumes文にて線分の性質を定義する。ここで示されているものは，次の三つの定義である。

・線分AB = 線分AB
・線分AB = 線分BA
・線分AB = 線分CD ならば 線分AB = 線分DC

同様に，円についての関数を示す。

```
locale circledef = dist
fixes lcircle :: "point => circle => bool"
        (infixl "[on]" 50)
assumes circle dist1 : "[[p [on] (Ci c r)]]
        ==> (Se c r) [@] (Se c p)"
and circle dist3 : "[[p [on] (Ci c r); p [on] (Ci r c)]]
  ==> (Se p c) [@] (Se p r)"
```

これは指定した点が指定した円の円周上の点であるときの性質を定義している。「A [on] CR」で「中心C，半径CRで描かれる円の円周上に点Aがあるとき」を意味する。ここで示されているものは次の二つの定義である。

・A [on] CR ならば 線分CR = 線分CA
・A [on] CR かつ A [on] RC ならば
　線分AC = 線分AR

6.　命題の証明

Isabelle/HOLを用いてユークリッド原論Book1の命題1を証明する過程を示す。

命題1：与えられた有限な直線（線分）の上に等辺三角形をつくること。

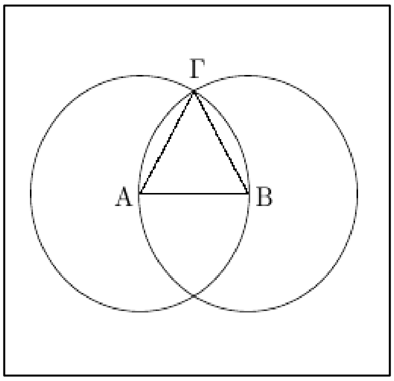

図 1：命題 1 の図

・証明手順
- 仮定
a1. 与えられた線分をABとする。
a2. 中心A, 半径ABをもって円を描く。
a3. 中心B, 半径BAをもって円を描く。
a4. 2円の交点をΓとし，ΓA，ΓBを結ぶ。

- 証明
P1. a2より, AB = ΓA。
P2. a3より, AB = ΓB。
P3. a4より，ΓA = ΓB。

P1 P2 P3 より，線分 AB 上に等辺三角形ΓAB がつくられる。Isabelle上での実装は以下のようになる。

```
theorem (in areadef) Proposition1_1:
  fixes A B Γ :: point
    and AB ΓA ΓB :: segment
    and CircAB CircBA :: circle
assumes
```

```
  "AB = Se A B" "ΓA = Se Γ A" "ΓB = Se Γ B"
  "CircAB = Ci A B" "CircBA = Ci B A"
  "Γ [on] CircAB" Γ [on] CirA"
  shows "AB [@] ΓA" and "AB [@] ΓB"
    and "ΓB [@] ΓA"
proof -
  from assms show "AB [@] ΓA"
    by (simp add:circle_dist1 dist_rev3)
  from assms show "AB [@] ΓB"
    by (simp add:circle_dist1 dist_rev1 dist_rev3)
  from assms show "ΓB [@] ΓA"
    by (simp add:circle_dist3)
qed
```

各命題証明後，以後の証明に使えるように，その内容を新たな関数として加える。命題1ならば以下のような関数になる。

```
locale L_Proposition1_1 = areadef +
fixes L Prop1 1 :: "point => segment => bool"
  ("[p1-1] _,_ ")
assumes Prop1 1 : "[[ [p1-1] pn,(Se p1 p2)]]
  ==> Se p1 p2 [@] Se pn p1
  ∧ Se p1 p2 [@] Se pn p2
  ∧ Se pn p1 [@] Se pn p2"
```

「[p1-1] C,AB」で「線分AB上に等辺三角形CABをつくる」という意味となる。

これを用いた命題2の証明を以下に示す（証明手順，使用されている関数および型については省略）。

命題2：与えられた点において与えられた線分に等しい線分をつくること。

```
theorem (in L Proposition1_1) Proposition1_2:
  fixes A B Γ Δ Λ H :: point
    and ΔA AΛ ΔB BΓ AB BH ΔΛ ΔH :: segment
    and ΔA_AΛ ΔB_BΓ ΔB_BH :: seg_list
    and CircBΓ CircΔH :: circle
  assumes
    "ΔA = Se Δ A" "AΛ = Se A Λ" "ΔB = Se Δ B"
    "BΓ = Se B Γ" "AB = Se A B" "BH = Se B H"
    "ΔΛ = Se Δ Λ" "ΔH = Se Δ H"
    "ΔA_AΛ = Sel ΔA AΛ" "ΔB_BΓ = Sel ΔB BΓ"
    "ΔB_BH = Sel ΔB BH"
    "ΔΛ [@-@] ΔA_AΛ" "ΔH [@-@] ΔB_BH"
    "CircBΓ = Ci B Γ" "CircΔH = Ci Δ H"
    "Λ [on] CircΔH" "H [on] CircBΓ"
    "H [on] CircΔH" "Γ [on] CircBΓ"
    "[p1-1]Δ,AB"
  shows "AΛ [@] BΓ"
proof -
  from assms have P1:"ΔA_AΛ [@@] ΔB_BH"
  by (simp add:circle_dist2 dist_rev2 dist_list_list)
  from assms have P2:"ΔB BH [@@] ΔB BΓ"
    by (simp add:dist_list1 list_rev2 circle_dist2
dist_rev2)
  from assms P1 P2 have P3:"ΔA_AΛ [@@] ΔB_BΓ"
    by (blast intro:list_trans)
  from assms have P4:"ΔA [@] ΔB"
    by (simp add:Prop1_1)
  from assms P3 P4 show "AΛ [@] BΓ"
    by (simp add:list_dist3)
qed
```

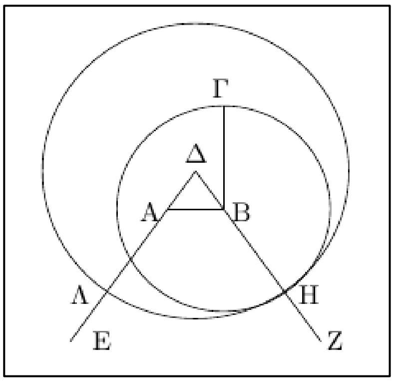

図２：命題２の図

参考文献

Fitzpatrick R, EUCLID'S ELEMENTS OF GEOMETRY,http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf#search=%27Euclid+Elements%27

Howson G. (2000), Geometry1950-1970. Plenary Presentation at the International Symposium: One Handred Years of L'Enseignement Mathematique: *Moments of Mathematics Education in the 20th Century*.

Mammana, Carmelo, Villani, V. (Eds.) (1998), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, An ICMI Study (New ICMI Study Series).